**“LA ENSEÑANZA DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA”**

**Estudiante: Alma Angelina Figueroa Lopez**

**Investigador: M.C Jorge Otero González**

RESUMEN

El objetivo de los matemáticos es descubrir y comunicar ciertas verdades. Las matemáticas son el lenguaje de los matemáticos y una demostración, es un método para comunicar una verdad matemática a otra persona que también “habla” el mismo idioma. Una propiedad del lenguaje de las matemáticas es su precisión. Una demostración propiamente presentada no deberá contener ambigüedades y no habrá duda de que es correcta.

Para entender, hacer una demostración o ambas cosas, usted debe aprender un idioma nuevo, un método nuevo de razonamiento.

Para lograr desarrollar y comunicar tus propias demostraciones de verdades matemáticas conocidas necesitas aplicar una cierta cantidad de ingenio, creatividad, intuición y experiencia.

Cualquiera que haya probado teoremas bien sabe que al hacer una demostración es muy común intentar varios caminos antes de encontrar el exitoso. Algunos autores consideran que hacer demostraciones es como construir un rompecabezas: “No hay reglas acerca de cómo deben ser resueltos los rompecabezas. La única regla concierne el producto final: todas las piezas deben estar en su lugar y el dibujo debe aparecer correctamente”

“Una persona se enfrenta a un problema cuando acepta una tarea, pero no sabe de antemano como realizarla. Aceptar una tarea implica poseer algún criterio que pueda aplicarse para determinar cuándo se ha terminado la tarea con éxito”

“Un problema es una situación en la que se intenta alcanzar un objetivo y se hace necesario un medio para conseguirlo”

La mayor parte de los autores están de acuerdo en que para resolver problemas hacen falta destrezas de planificación, (habilidad para seleccionar y ordenar el conocimiento necesario), de verificación (habilidad para determinar qué plan es el efectivo), y de reformulación (habilidad para modificar el plan, a la luz de la información obtenida con la verificación).

Los que nos desarrollamos como docentes dentro del campo de la enseñanza- aprendizaje de las matemáticas a nivel de preparatoria (preuniversitario), hemos experimentado una problemática al ver lo difícil que es para algunos alumnos comprender las matemáticas en la tarea cotidiana, también se ha observado que hay quienes llegan a este nivel con antecedentes académicos deficientes, preconcepciones erróneas, falta de interés malos hábitos de estudio etc.

Se acepta hoy tal vez por influjo de una civilización dominada por la ciencia y la técnica que es imprescindible una preparación adecuada en las matemáticas. Esta ciencia constituye un instrumento de inmensa utilidad para el hombre moderno; vivimos en un mar de números: horarios, operaciones comerciales, velocidad, estadísticas etc. Por eso una de las tareas principales de la escuela es familiarizar al alumno con procesos matemáticos en sus diversos grados de complejidad.

Los procedimientos de solución en la enseñanza se pueden clasificar en dos grandes clases; los algorítmicos y los heurísticos. Ambos tienen en común que se aplican en la solución de ejercicios y problemas de diversos tipos. Su diferencia esencial consiste en que: si para una determinada clase de ejercicios se conoce un algoritmo de solución, entonces todo ejercicio de esta clase se puede resolver con seguridad, en la misma forma, mediante la aplicación de dicho algoritmo, en cambio, si para un ejercicio no se dispone de ningún algoritmo de solución (porque no existe o no se conoce), entonces primero hay que determinar una vía de solución apropiada. Para ello puede ser útil tener en cuenta los procedimientos heurísticos que permiten realizar un trabajo sistemático orientado hacia este objetivo, pero sin que sea posible asegurar que de ese modo se encuentre una vía de solución. Existe la necesidad de que los alumnos se familiaricen con los procedimientos de solución y se capaciten para aplicarlos.

En esta investigación se analizó el método de los 4 pasos de George Pólya, que está enfocado a la solución de problemas matemáticos.

**GEORGE PÓLYA**

Nació en Hungría en 1887.Interesado en el proceso del descubrimiento. Enriqueció a las matemáticas con un importante legado en la enseñanza de estrategias para resolver problemas.

**METODO DE LOS 4 PASOS:**

**1.- ENTENDER EL PROBLEMA**

**2.- CONFIGURAR UN PLAN**

**3.- EJECUTAR EL PLAN**

**4.- MIRAR HACIA ATRÁS**

***1.- ENTENDER EL PROBLEMA (COMPRENDER EL PROBLEMA)***

¿Entiendes todo lo que te dice?

¿Puedes representar el problema con tus propias palabras?

¿Distingues cuáles son los datos?

¿Sabes a que quieres llegar?

¿Hay suficiente información?

¿Hay información extraña?

¿Es este problema similar a algún otro que hayas resuelto antes?

¿Cuál es la incógnita?

Se debe de leer el enunciado despacio

Hay que tratar de encontrar la relación entre los datos y la incógnita

**2.- CONFIGURAR UN PLAN (TRAZAR UN PLAN PARA RESOLVERLO)**

¿Puedes usar alguna de las siguientes estrategias?

Ensayo y error

Usar una variable

Buscar un patrón

Resolver un problema similar mas simple

Hacer una figura

Hacer un diagrama

Usar propiedades de los números

Usar casos

Buscar una fórmula, etc.

EJEMPLO: SI EN EL TRIANGULO XYZ, CON LADOS x Y y E HIPOTENUSA z TIENE UN AREA DE $\frac{Z^{2}}{4}$, ENTONCES, EL TRIANGULO ES ISÓSCELES.

Triángulo isósceles; tiene 2 lados iguales

Fórmula para calcular el área de un triángulo; $\frac{b\*h}{2}$

Teorema de Pitágoras; $c^{2}=a^{2}+ b^{2}$



**3.- EJECUTAR UN PLAN (PONER EN PRACTICA EL PLAN)**

Implementar la estrategia

Toma el tiempo necesario para resolverlo

No tengas miedo de volver a empezar

**4.- MIRAR HACIA ATRÁS (COMPROBAR LOS RESULTADOS)**

¿Es tu solución correcta?

¿Puedes ver como extender tu solución a un caso general?

¿Puedes obtener el resultado de manera diferente?

¿Puedes emplear el resultado o el método en algún otro problema?

Demostración del ejemplo:

De la hipótesis y la fórmula para el área de un triángulo, el área de XYZ es igual a $\frac{xy}{2}$=$\frac{Z^{2}}{4}$. Por el teorema de Pitágoras,

 ($x^{2}+y^{2})=z^{2}, y escribimos $ ($x^{2}+y^{2})$ en lugar de $z^{2}$ y efectuando algunas operaciones algebraicas se obtiene (x-y)=0. de aquí que x=y y el triangulo XYZ es isósceles. Q.E.O (abreviación en griego de la frase: lo que se quería demostrar)

INTRODUCCION

La mayoría de los estudiantes tiene dificultades para identificar una demostración matemática, además la falta de capacidad para comunicar una demostración matemática que perjudica a los estudiantes, en algunos casos, juzgan los argumentos matemáticos según ciertos aspectos empíricos en lugar de usar criterios lógicos (Finlow-Bates, Lerman y Morgan, 1993), otros, consideran muchas proposiciones matemáticas triviales porque las juzgan en términos de su valor epistémico en lugar de juzgarlas por su valor lógico (Harel, 2006).

Como lo menciona Dreyfus (1999) una de las dificultades que tienen los alumnos para comprender la noción de demostración e identificarla, reside en los libros de texto, ciertos argumento formales suelen acompañarlos de algunas justificaciones visuales o intuitivas que invitan al estudiante a considerar estas formas de exposición como una demostración.

MATERIALES Y METODOS

La metodología que se empleo fue la cualitativa, para ello en una primera selección se les aplico un examen tipo opción múltiple a un número de estudiantes de la preparatoria “Emiliano Zapata” de la Benemérita Universidad Autónoma De Puebla, con la finalidad de seleccionar algunos de estos estudiantes a los que se les aplicarían problemas de opción tipo “abierta” donde ellos deberían desarrollar algún razonamiento, fue así que se seleccionaron a 50 estudiantes y se les aplico unos ejercicios para analizar: 1) El tipo de razonamiento que empleaban en cada enunciado, 2) Si identificaban y aplicaban algún método de demostración matemática. Fueron 6 los problemas y se utilizaron dos días para la aplicación.

RESULTADOS ESPERADOS

A continuación se muestran los problemas que se les aplicaron a los estudiantes de la preparatoria, así como el análisis de cada uno de ellos.

**1.- Si ab=12, bc=20, ac=15 y “a” es positivo, ¿Cuánto vale abc?**

Por hipótesis tenemos que ab=12, bc=20, ac=15 y nos dice que “a” es positivo. Entonces como ab=12 y nos dice que “a” es positivo, por lo tanto “b” debe ser positivo, y de igual manera para que se cumpla bc=20, “c” también debe ser positivo. Y así llegamos que el resultado de “abc” será también positivo. Ahora para poder llegar a la solución multiplicamos los términos correspondientes de cada miembros de las igualdades:

(ab)(bc)(ac)= (12) (20) (15) Multiplicación o producto

(ab2c)(ac)= (240) (15)

a2b2c2=3600 Aplicamos propiedad de los exponentes

(abc)2=3600 Aplicamos raíz en ambos miembros

$\sqrt{(abc)^{2}}$=$\sqrt{3600}$

abc=60

**ANÁLISIS:**

IMPORTANCIA DEL ENUNCIADO

LEYES DE LOS SIGNOS

PROPIEDADES DE LOS EXPONENTES

**2.- Sean a, b y c números enteros positivos tales que ab+ac=80 y ab+bc=425. ¿Cuál es el valor de a+b+c?**

Tenemos que ab+ac=80, se sigue que a(b+c)=80. Es decir, $b+c=\frac{80}{a}$, luego, sumando “a” en ambos miembros, obtenemos que $a+b+c=a+\frac{80}{a}$. Así también para ab+bc=425, es fácil deducir que $a+b+c=b+\frac{425}{b}$.

Como a, b y c son enteros positivos, a+b+c será un entero positivo. Luego, en consecuencia, $a+\frac{80}{a}$ y $b+\frac{425}{b}$ también deben de serlo.

Entonces, “a” debe ser un divisor de 80 y “b” un divisor de 425. Así, como 80= (5) (24) y 425= (17) (52), se tiene que los posibles valores de “a” y “b” son;

a= 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80 y b= 1, 5, 17, 25, 85, 425

Para terminar, para cada uno de estos valores, basta calcular el valor de $a+\frac{80}{a}$ y $b+\frac{425}{b}$ .

Donde los resultados de estos dos sean iguales.

Sea $a+\frac{80}{a}$= r1, entonces;

Si a=1 => r1=81

Si a=2 => r1=42

Si a=4 => r1=24

Ahora sea $b+\frac{425}{b}$= r2, entonces;

Si b=1 => r2=426

Si b=5 => r2=90

Si b=25 => r2=42

Como el valor común es 42, sabemos entonces que a=2 y b=25, y así encontramos que a+b+c=42.

**ANÁLISIS:**

¿QUÉ TE PIDE?

SIGNOS

FACTORIZACIÓN

**3.- En el “interior” del rectángulo ABCD, se traza el paralelogramo AECF cuyos lados AF y CE son “perpendiculares” a la diagonal BD del rectángulo. Si AB=40 y BC=30, calcula el área del paralelogramo AECF.**

Por el enunciado tenemos el siguiente diagrama:



**ANÁLISIS:**

REALIZAR FIGURA

CONOCER CONCEPTOS

FORMULAS DE ÁREAS

TEOREMA DE PITÁGORAS

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

CRITERIOS DE TRIÁNGULOS CONGRUENTES

**4.- En el triángulo ABC, se tiene que AB=AC. Sea D el punto en el que la “bisectriz” de** $∡ $**ABC intersecta al lado AC.**

**a) ¿Si el triángulo BCD es isósceles, entonces el triángulo ABD, también, es isósceles?**

**b) ¿Si el triángulo ABD es isósceles, entonces el triángulo BCD, también, es isósceles?**

Para el a) tenemos las siguientes proposiciones:

* El triángulo BCD es isósceles
* El triángulo ABD, también, es isósceles

Para demostrar que A=>B se puede suponer que A es verdadero y, de alguna forma, debemos usar esta información para lograr la conclusión de que B es verdadero.

Y utilizando el proceso regresivo se inicia preguntando: ¿Cómo o cuando puedo concluir que la proposición B es verdadera?

Y la pregunta abstracta para el primer ejercicio seria: ¿Cómo puedo saber que un triángulo es isósceles?

Esto es demostrando que dos de sus lados deben ser iguales y para esto existen tres casos:

1.- BC=BD

2.- BC=DC

3.- BD=DC

NOTACIÓN:

|  |  |
| --- | --- |
| LADO DEL TRIÁNGULO | AB |
| ÁNGULO | ∡ |
| TRIÁNGULO ABC | Δ ABC |

PROPIEDADES

1. Si a=b y c=d entonces a-c=b-d.
2. En un triángulo a lados iguales se oponen ángulos iguales.
3. Bisectriz: semirrecta que parte del vértice de un ángulo y lo divide en dos partes iguales.
4. Ángulos exteriores: es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes a él.
5. La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos; es decir, suman 180°.
6. Triangulo isósceles; es un polígono de tres lados, siendo dos iguales y el otro desigual. Por lo tanto, los ángulos también serán dos iguales y el otro diferente.

Entonces con el enunciado sabemos que existe un **Δ** ABC, donde AB=AC, por lo tanto **∡**ABC=**∡**BCA, por proposición 2.

Y también existe un punto D en el que la bisectriz de ∡ ABC intersecta a AC, con la bisectriz en ∡ABC se obtendrá que ∡ABD=∡DBC a los que llamaremos α, los que sumados nos dan ∡ABC=2α y como ∡ABC= ∡BCA entonces ∡BCA=2α. Y por proposición 4 ∡BDA= 3α.

**ANÁLISIS:**

CASOS

FIGURA

SÍMBOLOS

CONCEPTOS GEOMÉTRICOS

PROPIEDADES

DISCUSION

Se debe promover el proceso razonado, y saber la importancia que desempeña la lectura y escritura en la solución de problemas.

Resolver problemas te enseña:

Generar dudas, entender y a escribir, promover los procesos de lectura y escritura ejemplo; ((2,5) coordenada, intervalo, m.c.d), conocer símbolos, a preguntar dudas (concretas), nuevos conceptos, indagar lo que necesitas, capacidad de análisis, tener orden, escribir tus ideas, a sustentar lo que decimos.

Pero para ello debes:

Aceptar retos, a ver el problema desde varios ángulos, saber que resolver un problema se necesita tiempo pues no se resolverán en unos minutos, pregúntate acerca de lo que dice el problema, si te sientes estresado tomate un tiempo y después de un descanso vuelve a seguir intentando, busca ideas, y lo más importante ¡disfrútalo!, resolver un problema es una experiencia significativa.

CONCLUSIONES

Después de la aplicación de los ejercicios hemos detectado que los estudiantes no llevan un tipo de razonamiento deductivo, no hay suficiente argumentación para la solución de los problemas y además la falta de conocimiento acerca de los conceptos implicados en los enunciados hace que no logren comprender lo que el problema pide, si bien es cierto que no hay una receta la cual diga el tipo de demostración que se debe emplear para cada problema, puesto que la solución de cada problema se desarrolla de manera diferente. Así llegue a la conclusión de cuáles son las debilidades y dificultades en los estudiantes dentro de los enunciados y resolución de cada problema, como son conceptos, símbolos involucrados en el enunciado, y argumentación al momento de resolverlos. Otro de mis análisis fue la importancia que tiene la escritura en una demostración, la cual no es tan fácil desarrollar ya que su respuesta es un ensayo, de manera literal es como escribir un poema o una novela la cual tiene que tener coherencia y palabras tal vez no tan comunes para los lectores, pero que son de gran importancia en la redacción de estas. Sin dejar pasar agradezco al verano de Investigación Científica la oportunidad de enriquecer mi formación académica y más en el ámbito de la investigación.

LITERATURA CITADA

* BECERRA, D. L. (2012). PROPUESTA METODOLÓGICA PARA MEJORAR LA INTERPRETACIÓN, ANÁLISIS Y SOLUCIÓN DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN LOS ESTUDIANTES DE QUINTO GRADO DE LA INSTITUCION EDUCATIVA ALEJANDRO VÉLEZ BARRIENTOS.
* GANGOSO, Z. (1999). INVESTIGACIONES EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN CIENCIAS. CÓRDOBA.
* MARTINEZ, S. B. (2015). MÉTODO PÓLYA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS.
* NIETO, M. P. (s.f.). LA RESOLUCION DE PROBLEMAS N LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS. ASPECTOS DIDACTICOS Y COGNITIVOS.
* SOLOW, D. (1993). CÓMO ENTENDER Y HACER DEMOSTRACIONES EN MATEMÁTICAS. PUERTO RICO: LIMUSA.
* VEGA, M. L. (s.f.). RESOLVER PROBLEMAS: AYUDAR A LOS ALUMNOS A PENSAR POR SÍ MISMOS.